Seminarios de Cálculo

Análisis de funciones en una variable

Analiza las siguientes funciones reales de variable real:

- $f_1(x) = 2 - 3x + x^2 + 7x^3$
- $f_2(x) = \dfrac{1}{3x} + \dfrac{2}{5x^2} + \dfrac{4}{3x^3}$
- $f_3(x) = \dfrac{5 - 15x}{2x + 5x^2}$
- $f_4(x) = 4e^{-(3x-2)^2}$
- $f_5(x) = \ln\left(\dfrac{3x}{4x^2 + 2}\right)$
- $f_6(x) = \sin(3x + 2) \cdot e^{-x^2/10}$
- $f_7(x) = \dfrac{\tan(2x)}{3x + 1}$

Se pide realizar para cada función:

1. Calcular la primera (f') y segunda derivada (f'').
2. Encontrar los puntos críticos y clasificarlos en máximos o mínimos relativos.
3. Hallar los puntos de inflexión (donde cambia la concavidad).
4. Calcular los límites en el infinito y estudiar las discontinuidades (asíntotas horizontales y verticales).
5. Realizar un esbozo manual de la gráfica y comprobar los resultados con GeoGebra.

Nota: Presta atención a la periodicidad de las funciones trigonométricas antes de determinar todos los extremos relativos.

Análisis de funciones en varias variable

Dadas las siguientes funciones escalares, puntos P y vectores de dirección $\vec{v}$:

Función	**Punto (P)**	**Vector ($\vec{v}$)**
$g_1(x,y) = -(x-3)^2 - (y-4)^2 + 10{,}5$	$P(2,3)$	$\vec{v} = (2,-2)$
$g_2(x,y) = +(x-3)^2 + (y-4)^2 + 10{,}5$	$P(1,1)$	$\vec{v} = (-2,3)$
$g_3(x,y) = +(x-3)^2 - (y-4)^2 + 10{,}5$	$P(2,5)$	$\vec{v} = (1,1)$
$g_4(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 3xy$	$P(3,4)$	$\vec{v} = (1,1)$
$g_5(x,y) = 2e^{4x^2+3y^2-5}$	$P(3,4)$	$\vec{v} = (1,1)$
$g_6(x,y,z) = xy^2z^3 + \ln\left(\dfrac{xy}{z^2-1}\right)$	$P(-3,2,2)$	$\vec{v} = (2,4,5)$

Determina para cada caso:

1. El vector gradiente $\nabla g(P)$.
2. La dirección de máximo crecimiento de la función y el valor de la pendiente máxima (módulo del gradiente) en el punto P.
3. La derivada direccional en el punto P según la dirección del vector $\vec{v}$ (recuerda normalizar el vector si es necesario).
4. Localiza los puntos críticos analíticamente ($\nabla g = 0$) y clasifícalos (Máximo, Mínimo o Punto de Silla) utilizando el criterio del Hessiano (para g_1 a g_5).
5. Visualiza y comprueba los resultados en GeoGebra 3D.

Cálculo integral y ecuaciones diferenciales

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales, encuentra la constante κ y realiza la predicción solicitada. Comprueba los resultados en GeoGebra.

a) Ley de Termalización de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = \kappa(T - 25)$$

Condiciones: $T(0) = 1$, $T(5) = 7$.
Objetivo: Obtener la función $T(t)$ y predecir la temperatura para $T(10)$.

b) Tasa de Variación Polinómica:

$$\frac{dM}{dt} = \kappa M(t^2 + t + 1)$$

Condiciones: $M(2) = 10$, $M(8) = 1{,}3$.
Objetivo: Obtener la función $M(t)$ y predecir el valor $M(5)$.

c) Cinética No Lineal:

$$\frac{dY}{dt} = \kappa Y^2 e^{-\kappa t}$$

Condiciones: $Y(0) = 1$, $Y(2) = 10$.
Objetivo: Obtener la función $Y(t)$ y predecir el valor $Y(3)$.

Problemas de Aplicación/Modelización (puedes usar GeoGebra)

Ejercicio 1: Problema de Mezclas (Tanque de Sal)
Un depósito con capacidad total de 50 L contiene inicialmente 10 L de agua pura. Comenzamos a verter una solución salina con una concentración de **100 g/L** a un ritmo de **4 L/min**. La mezcla se mantiene uniforme mediante agitación y, simultáneamente, se deja salir líquido del tanque a un ritmo de **2 L/min**.

- Obtén la ecuación general para el volumen de agua en el tanque $V(t)$. ¿Cuánto tiempo tardará el depósito en llenarse?
- Plantea la ecuación diferencial para la cantidad de sal $Q(t)$ y resuélvela. Recuerda el balance de masa:
$$\frac{dQ}{dt} = \text{Tasa Entrada} - \text{Tasa Salida}$$
- ¿Cuánta sal (en kg) habrá en el depósito en el instante exacto en que se llene?

Ejercicio 2: Crecimiento Orgánico
Se ha observado que la velocidad de crecimiento de la superficie S de una hoja de cierta especie vegetal es directamente proporcional a su superficie en dicho instante ($S' = k \cdot S$).

- Sabiendo que la superficie es de **1 cm**^{2} en $t = 1$ semana y de **5 cm**^{2} en $t = 2$ semanas:
  1. Resuelve la EDO por variables separables para hallar la función $S(t)$.
  2. Determina el valor de la constante de crecimiento k y la constante de integración C usando los datos.
  3. Calcula la superficie esperada para la semana 5 ($t = 5$).

Ejercicio 3: Cinética de Eliminación No Lineal
En ciertos fármacos, la velocidad de eliminación no es lineal, sino proporcional al cuadrado de la concentración ($C' = -k \cdot C^2$). En un ensayo clínico se obtienen los siguientes datos:

- Dosis inicial en $t = 0$: $C_0 = 20$ mg/L.
- Medición en $t = 2$ horas: $C_2 = 10$ mg/L.

Se pide:

1. Plantear y resolver la ecuación diferencial para $C(t)$.
2. Determinar el valor numérico de la constante k (indica sus unidades).
3. Calcular la concentración restante pasadas 6 horas desde la administración ($t = 6$).